ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЙ

Интегральным уравнением называется всякое уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла.

Пусть G – ограниченная область из R^n с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим линейные интегральные уравнения вида

$$\int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

$$x(t) = \mu \int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t), \tag{2}$$

где $x(t)$ – искомая функция $(t \in G)$, а $y(t)$ и $\mathrm{K}(t, s)$ – заданные функции, определенные, соответственно, в G и $\overline{G} \times \overline{G}$; μ – комплексное число (параметр). Функция $\mathrm{K}(t, s)$ – ядро интегрального уравнения, а функция $y(t)$ – свободный член уравнения.

Интегральные уравнения (1) и (2) – линейные интегральные уравнения Фредгольма, соответственно, первого и второго рода.

Пусть $n = 1$, а $G = (a, b)$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

Пусть G – ограниченная область из R^n с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим линейные интегральные уравнения вида

$$\int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

$$x(t) = \mu \int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t), \tag{2}$$

где $x(t)$ – искомая функция $(t \in G)$, а $y(t)$ и $\mathrm{K}(t, s)$ – заданные функции, определенные, соответственно, в G и $\overline{G} \times \overline{G}$; μ – комплексное число (параметр). Функция $\mathrm{K}(t, s)$ – ядро интегрального уравнения, а функция $y(t)$ – свободный член уравнения.

Интегральные уравнения (1) и (2) – линейные интегральные уравнения Фредгольма, соответственно, первого и второго рода.

Пусть $n = 1$, а $G = (a, b)$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

Интегральные уравнения содержат искомую функцию под знаком интеграла.

Пусть G – ограниченная область из R^n с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим линейные интегральные уравнения вида

$$\int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

$$x(t) = \mu \int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t), \tag{2}$$

где $x(t)$ – искомая функция $(t \in G)$, а $y(t)$ и $\mathrm{K}(t, s)$ – заданные функции, определенные, соответственно, в G и $\overline{G} \times \overline{G}$; μ – комплексное число (параметр). Функция $\mathrm{K}(t, s)$ – ядро интегрального уравнения, а функция $y(t)$ – свободный член уравнения.

Интегральные уравнения (1) и (2) – линейные интегральные уравнения Фредгольма, соответственно, первого и второго рода.

Пусть $n = 1$, а $G = (a, b)$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$\int_a^b \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{1'}$$

$$x(t) = \mu \int_a^b \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t). \tag{2'}$$

Интегральные уравнения вида

$$\int_a^t \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{3}$$

$$x(t) = \mu \int_a^t \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t). \tag{4}$$

$$x(t) = \mu \int_a^t \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t). \tag{4}$$

называются линейными интегральными уравнениями Вольтерра, соответственно, первого и второго рода.

Замечание 1. Очевидно, что уравнение Вольтерра можно рассматривать как уравнение Фредгольма, в котором ядро $\mathrm{K}(t, s)$ удовлетворяет условию:

$$\mathrm{K}(t, s) = 0 \quad \text{при} \quad s > t.$$

Решением интегральных уравнений (1), (2), (3), (4) будет функция $\varphi(t)$, которая будучи подставлена в эти уравнения обращает их в тождество (по t).

Для интегрального уравнения Вольтерра второго рода справедлива теорема 1.

Теорема 1. Если ядро $\mathrm{K}(t, s)$ интегрального уравнения (4) Вольтерра второго рода непрерывно в квадрате $P = \{(t, s): \ a \le s, \ t \le b\}$ (a и b конечны), то для любого числа μ и для любой функции $y(t) \in C[a, b]$ существует единственное непрерывное решение $x(t)$ уравнения (4), причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений, т.е. $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ (сходимость по норме пространства $C[a, b]$, т.е. равномерная), где $x_n(t)$ задается рекуррентным соотношением

$$x_n(t) = \mu\int_a^t \mathrm{K}(t, s)x_{n-1}(s)ds + y(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а $x_0(t)$ – произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция.

Для интегрального уравнения Фредгольма второго рода решение, как будет показано дальше, может существовать не для любых μ, а в случае его существования может быть не единственным. Тем не менее следующая теорема дает условия, при которых решение уравнения Фредгольма второго рода всегда существует и единственно.

Теорема 2. Если ядро $\mathrm{K}(t, s)$ интегрального уравнения (2) Фредгольма второго рода определено и непрерывно в $\overline{G}\times\overline{G}$, и $|\mu| < \dfrac{1}{d}$, где

$$d = \max_{t\in G}\int_G |\mathrm{K}(t, s)|\,ds,$$

то для любой функции $y(t) \in C(\overline{G})$ существует единственное решение $x(t) \in C(\overline{G})$ уравнения Фредгольма второго рода (2), причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений, т.е. $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ (сходимость по норме пространства $C(\overline{G})$, т.е. равномерная), где

$$x_n(t) = \mu \int_G \mathrm{K}(t, s) x_{n-1}(s)\, ds + y(t), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а $x_0(t)$ – любая непрерывная в $\overline{G}$ функция.

Пример 1.1. Составить интегральное уравнение, соответствующее следующему дифференциальному уравнению с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} y'' - y' \sin t + e^t \cdot y = t; \\ \qquad y(0) = 1; \\ \qquad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $y''(t) = \varphi(t)$. Тогда

$$y'(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau + y'(0) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau - 1;$$

$$y(t) = \int_0^t \left[\int_0^s \varphi(\tau)\, d\tau - 1 \right] ds + y(0) = \int_0^t \left[\int_0^s \varphi(\tau)\, d\tau \right] ds - t + 1 =$$

$$= \int_0^t \left[\varphi(\tau) \int_\tau^t ds \right] d\tau + 1 - t = \int_0^t (t - \tau) \varphi(\tau)\, d\tau + 1 - t.$$

Подставляя y'', y' и y в исходное уравнение, получим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = t - \sin t + e^t (t - 1) + \int_0^t \left[\sin t - e^t (t - \tau) \right] \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Пример 1.2. Методом дифференцирования решить следующее интегральное уравнение:

$$x(t) = 2 \int_0^t \frac{2s + 1}{(2t + 1)^2} x(s)\, ds + 1.$$

Решение. Дифференцируя данное интегральное уравнение Вольтерра, получим

$$x'(t) = \frac{2}{2t + 1} \cdot x(t) - 8 \int_0^t \frac{2s + 1}{(2t + 1)^3} x(s)\, ds.$$

Воспользовавшись заданным уравнением, перепишем это уравнение в виде

$$x'(t)=\frac{2}{2t+1}x(t)-\frac{4}{2t+1}x(t)+\frac{4}{2t+1},$$

или
$$x'(t)=-\frac{2}{2t+1}x(t)+\frac{4}{2t+1}.$$

Очевидно, что $x(0)=1$. Следовательно, решение заданного интегрального уравнения сводится к решению задачи Коши

$$\begin{cases} x'(t)=-\dfrac{2}{2t+1}x(t)+\dfrac{4}{2t+1}. \\ x(0)=1. \end{cases}$$

Решая ее стандартным методом [7], получим
$$x(t)=\frac{4t+1}{2t+1}.$$

Метод последовательных приближений

Если в уравнении Фредгольма (1.1) числовой параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda|<\frac{1}{B}, \text{ где } B^2=\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt, \qquad (2.1)$$

то уравнение имеет единственное решение при любой непрерывной функции (свободном члене) $f(x)$. В этом случае оно может быть найдено методом последовательных приближений. Выбирая произвольным образом нулевое приближение $y_0(x)$, можно построить последовательность функций $\{y_n(x)\}$ с помощью рекуррентной формулы

$$y_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\,y_{n-1}(t)\,dt. \qquad (2.2)$$

Функции $y_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения. Данная последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к точному решению, т.е. $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Пример 2.1. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

Решение. Отметим, что в данном уравнении

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad K(x,t) = 1.$$

Тогда

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x,t)|^2 \, dx \, dt = \int_0^1 \int_0^1 dx \, dt = 1,$$

и условие $|\lambda| < \frac{1}{B}$ выполнено. В качестве нулевого приближения возьмем свободный член $f(x)$ данного уравнения, т.е.

$$y_0(x) = f(x) = \sin \pi x.$$

Строим последовательность функций $\{y_n(x)\}$ по рекуррентной формуле (2.2):

$$y_1(x) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 K(x,t) \, y_0(t) \, dt =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi t \, dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},$$

$$y_2(x) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 K(x,t) \, y_1(t) \, dt =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} \right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},$$

$$y_3(x) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 K(x,t) \, y_2(t) \, dt =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi},$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 K(x,t) \, y_{n-1}(t) \, dt =$$

$$=\sin\pi x+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2^2\pi}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\pi}=\sin\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}.$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\right)=\sin\pi x+\frac{2}{\pi}.$$

Пример 2.2. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

$$y(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\,y(t)\,dt.$$

Решение. Отметим, что в данном уравнении $\lambda=\frac{1}{2}$, $K(x,t)=xt$. Тогда

$$B^2=\int_0^1\int_0^1|K(x,t)|^2\,dx\,dt=\int_0^1\int_0^1 x^2t^2\,dx\,dt=\frac{1}{9},$$

и условие $|\lambda|<\frac{1}{B}$ выполнено.

Решим данное интегральное уравнение двумя способами: 1) в качестве нулевого приближения выберем свободный член уравнения, т.е. $y_0(x)=f(x)$; 2) произвольным образом выберем нулевое приближение $y_0(x)$.

1-й способ. В качестве нулевого приближения возьмем свободный член $f(x)$ данного уравнения, т.е. $y_0(x)=f(x)=\frac{5}{6}x$. Строим по формуле (2.2) последовательность функций $\{y_n(x)\}$:

$$y_1(x)=f(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\,y_0(t)\,dt=$$

$$=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\cdot\frac{5}{6}t\,dt=\frac{5}{6}x+\frac{5}{36}x=\frac{35}{36}x=\frac{5}{6}x\left(1+\frac{1}{6}\right),$$

$$y_2(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_1(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt \cdot \frac{35}{36}t\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{35x}{216} = \frac{215}{216}x = \frac{5}{6}x\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right),$$

$$y_3(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_2(t)\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt \cdot \frac{215}{216}t\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{215x}{1296} = \frac{1295x}{1296} = \frac{5}{6}x\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216}\right),$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots + \frac{1}{6^n}\right) = \frac{5}{6}x\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{6^k}.$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}x\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{6^k}\right) = \frac{5}{6}x \cdot \frac{6}{5} = x.$$

2-й способ. Выбираем произвольным образом нулевое приближение, например $y_0(x) = x^2$. Строим по формуле (2.2) последовательность функций $\{y_n(x)\}$:

$$y_1(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_0(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt^3\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{1}{8}x = \frac{23x}{24},$$

$$y_2(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_1(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt \cdot \frac{23}{24}t\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{23}{144}x = \frac{143}{144}x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{5}{144}x,$$

$$y_3(x)=f(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\,y_2(t)\,dt=$$

$$=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\cdot\frac{143}{144}t\,dt=\frac{5}{6}x+\frac{143}{864}x=\frac{863}{864}x=\frac{5}{6}x+\frac{1}{8}x+\frac{5}{144}x+\frac{5}{864}x\,,$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x)=f(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\,y_{n-1}(t)\,dt=$$

$$=\frac{5}{6}x+\frac{1}{8}x+\frac{5}{144}x+\frac{5}{864}x+\ldots+\frac{5}{144\cdot 6^{n-2}}\,x=$$

$$=\frac{23x}{24}+\frac{5}{144}x\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{6^{n-2}}\right)=\frac{23}{24}x+\frac{5}{144}x\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{6^k}\,.$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{23}{24}x+\frac{5}{144}x\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{6^k}\right)=$$

$$=\frac{23}{24}x+\frac{5}{144}x\cdot\frac{6}{5}=\frac{23}{24}x+\frac{1}{24}x=x\,.$$